Разбор домашнего задания (Модуль №4):

1. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} ax - 1 < 0 \\ x + a > 0 \end{cases}$ не имеет решений?

Ответ: $\emptyset$.

2. Сколько действительных решений имеет система $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$

Ответ: нет решений при $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ или при $a > 1$, четыре решения при $a = \frac{1}{2}, a = 1$, восемь решений при $\frac{1}{2} < a < 1$.

Указание. Задача решается графически. Геометрическим местом точек, координаты которых удовлетворяют второму уравнению, является окружность с радиусом $\sqrt{a}$ с центром в начале координат. Первое уравнение представляет собой квадрат, вершины которого лежат в точках (1,0), (0,1), (–1, 0), (0,–1). Его стороны можно построить, избавляясь определенным образом от модулей в каждом квадранте. Задача сводится к определению числа точек пересечения окружности с указанным квадратом. Если диаметр $2\sqrt{a}$ меньше стороны квадрата, равной $\sqrt{2}$, или больше диагонали квадрата, равной 2, то точек пересечения нет. Если является вписанным или описанным для этой окружности, то $a = \frac{1}{2}$ или $a = 1$. Окружность может также пересекать все стороны квадрата по два раза, тогда решений будет восемь.

3. Решить систему:
$$\begin{aligned} x + y + z &= a, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= a^3. \end{aligned}$$

Решение: Из тождества $(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + yz + xz)$ находим, что $xy + yz + xz = 0$.

Из тождества $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$ получаем, что $xyz = 0$. Таким образом, x, y, z – корни кубического уравнения $x^3 - ax^2 = 0$.

Ответ: $\{a, 0, 0\}$.