Модуль 3-4 (7-8). Инварианты в заданиях с параметрами

Решение задач для самостоятельной работы

Задача 1. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $|x+a|+|x-a|+\sin(2x)\cdot\sin(3x)=\cos(2x)\cdot\cos(3x)$ имеет нечетное число корней на отрезке $x\in[-2017\pi;\ 2017\pi]$.

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду $|x+a|+|x-a|=\cos(5x)$.

Уравнение не изменяется при замене x на $-x$. Следовательно, если $x=x_0$ является корнем уравнения, то корнем уравнения будет являться и $x=-x_0$. Нечетное число корней может быть только в том случае, когда $x=0$ является корнем (количество корней в уравнении на данном отрезке ограничено). Следовательно, a = – 0,5 или a = 0,5.

Ответ: – 0,5; 0,5.

Задача 2. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $\left(\frac{1}{x^{2017}}+x^{2017}\right)\cdot(2a+7)=\left(x^{2018}+\frac{1}{x^{2018}}\right)\cdot(3a-2011)$ имеет единственный корень.

Решение. 1. Уравнение не изменяется при замене x на $\frac{1}{x}$. Следовательно, если $x=x_0$ является корнем уравнения, то корнем уравнения будет являться и $x=\frac{1}{x_0}$. Нечетное число корней может быть только в том случае, когда $x=1$ или $x=-1$ (но неодновременно) является корнем (количество корней в уравнении ограничено). Следовательно, a = 2018 или a = 400,8.

2. Исходное уравнение должно иметь единственный корень, а 1 – число нечетное. Проверим количество корней исходного уравнения при a = 2018 и a = 400,8.

2.1. При a = 2018, получим уравнение $\frac{1}{x^{2017}}+x^{2017}=x^{2018}+\frac{1}{x^{2018}}$. Перенесем все выражения в одну часть уравнения, и выполним разложение на множители:

$$x^{2018}-x^{2017}+\frac{1}{x^{2018}}-\frac{1}{x^{2017}}=0,$$

$$x^{2017}\cdot(x-1)+\frac{1}{x^{2018}}\cdot(1-x)=0,$$

$$(x-1)\cdot\left(x^{2017}-\frac{1}{x^{2018}}\right)=0,$$

$$(x-1)\cdot\frac{x^{4035}-1}{x^{2018}}=0.$$

Полученное уравнение имеет единственный корень $x=1$.

2.2. При a = 400,8, решение аналогично, будет единственный корень $x=-1$.

Ответ: 400,8; 2018.

Задача 3. Определите, при каких значениях параметра *a* уравнение $(\sqrt{x}-|a|)^{2015}+3\sqrt{x}=x^{2015}+3(x+|a|)$ имеет хотя бы одно действительное решение.

Решение. 1. Преобразовав уравнение к виду

$$(\sqrt{x}-|a|)^{2015}+3\cdot(\sqrt{x}-|a|)=x^{2015}+3x \text{ (где } x\geq 0\text{)}$$

можно заметить, что правая часть уравнения получается из его левой части при замене $\sqrt{x}-|a|$ на x. Если рассмотреть возрастающую на всей числовой прямой функцию $f(t)=t^{2015}+3t$ (сумма двух возрастающих функций $y=t^{2015}$ и $y=3t$ является возрастающей функцией), то исходное уравнение можно записать в виде $f(\sqrt{x}-|a|)=f(x)$.

Так как возрастающая функция принимает каждое свое значение только при единственном значении аргумента, то исходное задание становится равносильным определению того, при каких значениях параметра *a* уравнение

$$\sqrt{x}-|a|=x$$

имеет действительное решение.

2. Определим, при каких значениях параметра *a* имеет решение уравнение

$$\sqrt{x}-|a|=x.$$

Так как $x\geq 0$, то уравнение $\sqrt{x}=x+|a|$ равносильно уравнению

$$x=x^2+a^2+2\cdot|a|\cdot x.$$

Получим $x^2+(2\cdot|a|-1)\cdot x+a^2=0$. Определим, когда неотрицателен дискриминант полученного уравнения $\frac{D}{4}=4a^2-4\cdot|a|+1-4a^2=1-4\cdot|a|$:

$$|a|\leq\frac{1}{4},\ a\in\left[-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right].$$

При полученных значениях a, произведение корней квадратного уравнения неотрицательно, а их сумма положительна, следовательно, есть неотрицательные корни.

Ответ: $a \in \left[-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right]$.