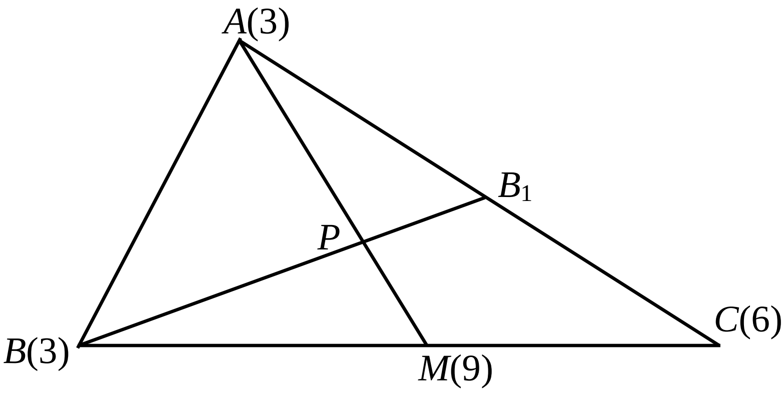
Модуль 4. Теоремы Чевы и Менелая. Барицентрический метод

Решение задач для самостоятельной работы

Задача 1. В треугольнике *ABC* на стороне *BC* взята точка *M* так, что *BM* : *MC* = 2 : 1. Точка *P* делит отрезок *AM* в отношении 3 : 1, считая от точки *A*. Прямая *BP* пересекает сторону *AC* в точке B_1. В каком отношении точка B_1 делит сторону *AC*?

Решение. Метод центров масс (барицентрический метод).



1. $BM : MC = 2 : 1$, разместим в точках *B* и *C* массы обратно пропорциональные указанному отношению: $\frac{m_C}{m_B} = \frac{BM}{BC} = \frac{2}{1}$. Для удобства вычислений, пусть $m_C = 6$, $m_B = 3$. Тогда точка *C* – центр масс отрезка *BC* объединяет в себе массу точек *B* и *C*: $m_M = 9$.

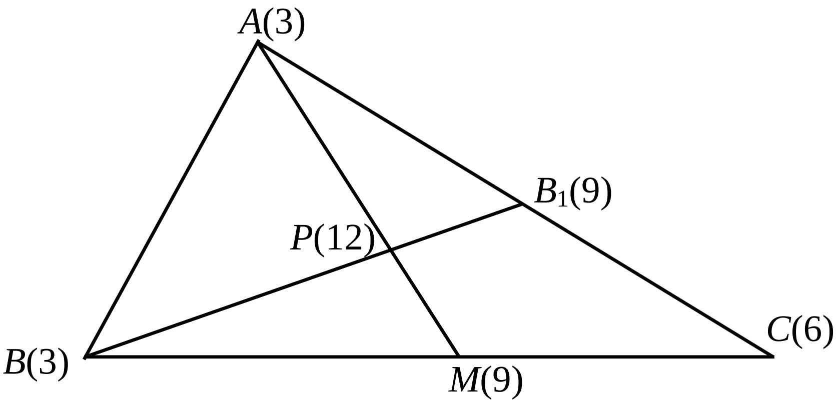
2. Точка *P* делит отрезок *AM* в отношении 3 : 1, , считая от точки А. поэтому $\frac{m_M}{m_A} = \frac{AP}{MP} = \frac{3}{1}$. Следовательно, $m_A = 3$. Точка B_1 – центр масс отрезка *AC*, следовательно, $AB_1 : B_1C = m_C : m_A = 6 : 3 = 2 : 1$.

Ответ: $AB_1 : B_1C = 2 : 1$.

Задача 2. В треугольнике *ABC* на стороне *BC* взята точка *M* так, что *BM* : *MC* = 2 : 1. Точка *P* делит отрезок *AM* в отношении 3 : 1, считая от точки *A*. Прямая *BP* пересекает сторону *AC* в точке B_1. Какую часть от площади треугольника *ABC* составляет площадь четырехугольника PB_1CM ?

Решение. 1. Методом центров масс (см. задачу 1). Пусть $S_{ABC} = S$.

Тогда $\frac{S_{ABB_1}}{S_{CBB_1}} = \frac{AB_1}{CB_1} = \frac{2}{1}$,



$S_{ABB_1} = \frac{2}{3}S$, $S_{CBB_1} = \frac{1}{3}S$.

$\frac{S_{ABP}}{S_{AB_1P}} = \frac{BP}{B_1P} = \frac{9}{3} = \frac{3}{1}$,

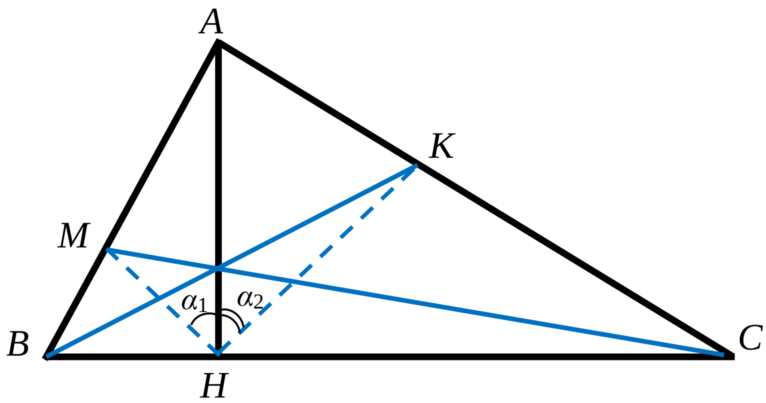
$S_{ABP} = \frac{3}{4}S_{ABB_1} = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}S = \frac{1}{2}S$.

$$\frac{S_{ABP}}{S_{MBP}} = \frac{AP}{MP} = \frac{9}{3} = 3, \ S_{MBP} = \frac{1}{3} S_{ABP} = \frac{1}{6} S.$$

$$S_{MPB_1C} = S - S_{MBP} - S_{ABB_1} = S - \frac{1}{6}S - \frac{2}{3}S = \frac{1}{6}S.$$

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Задача 3. Точки *H, K* и *M* лежат соответственно на сторонах *BC, AC* и *AB* треугольника *ABC*, в котором *AH* является высотой. Докажите, что *AH* служит биссектрисой угла *KHM* тогда и только тогда, когда *AH, BK* и *CM* пересекаются в одной точке.



Доказательство. 1 часть.

Дано: *AH, BK* и *CM* пересекаются в одной точке.

Доказать: *AH* служит биссектрисой угла *KHM*.

Доказательство.

1. Пусть $\angle MHA = \alpha_1$, $\angle KHA = \alpha_2$.

2. По теореме Чевы из ΔABC: $\frac{BM}{MA} \cdot \frac{AK}{CK} \cdot \frac{CH}{HB} = 1$.

3. По теореме синусов из ΔAMH: $\frac{\sin\alpha_1}{MA} = \frac{\sin AMH}{AH}$ (*),

из ΔBMH: $\frac{\sin(90^\circ - \alpha_1)}{MB} = \frac{\sin(180^\circ - AMH)}{BH}$, $\frac{\cos\alpha_1}{MB} = \frac{\sin AMH}{BH}$ (**).

4. Разделим равенство (*) на равенство (**): $tg\alpha_1 \cdot \frac{BM}{MA} = \frac{BH}{AH}$, $tg\alpha_1 = \frac{MA}{BM} \cdot \frac{BH}{AH}$.

5. Аналогично, $tg\alpha_2 = \frac{AK}{CK} \cdot \frac{CH}{AH}$.

6. По теореме Чевы $\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{BM}{MA} \cdot \frac{AK}{CK} \cdot \frac{CH}{HB} = 1$, $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$, углы острые, поэтому $\alpha_1 = \alpha_2$. *AH* служит биссектрисой угла *KHM*. Что и требовалось доказать.

2 часть.

Дано: *AH* служит биссектрисой угла *KHM*.

Доказать: *AH*, *BK* и *CM* пересекаются в одной точке.

Доказательство. 1. Пусть $\angle MHA = \angle KHA = \alpha$.

2. По теореме синусов из ΔAMH: $\frac{\sin\alpha}{MA} = \frac{\sin AMH}{AH}$ (*),

из ΔBMH: $\frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{MB} = \frac{\sin(180^\circ - AMH)}{BH}$, $\frac{\cos\alpha}{MB} = \frac{\sin AMH}{BH}$ (**).

3. Разделим равенство (*) на равенство (**): $tg\alpha \cdot \frac{BM}{MA} = \frac{BH}{AH}$, $tg\alpha = \frac{MA}{BM} \cdot \frac{BH}{AH}$.

4. Аналогично, $tg\alpha = \frac{AK}{CK} \cdot \frac{CH}{AH}$.

5. $tg\alpha = \frac{MA}{BM} \cdot \frac{BH}{AH} = \frac{AK}{CK} \cdot \frac{CH}{AH}$.

По теореме Чевы $\frac{BM}{MA} \cdot \frac{AK}{CK} \cdot \frac{CH}{HB} = 1$, следовательно, по теореме Чевы, AH, BK и CM пересекаются в одной точке. Что и требовалось доказать.